

## LAHENDUSED 11.KLASS

### 1. Vastus: 2 õpilast

Lahendus:

*Lahendus 1:*

Oletame, et  $x\%$  õpilastest õpib kolme keelt,

$y\%$  õpilastest õpib kahte keelt ja

$z\%$  õpilastest õpib ühte keelt.

$n\%$  õpilastest ei õpi ühtegi keelt.

$$x + y + z + n = 100$$

Kuna  $z = 48$ , saame:  $x + y + n = 52$

$$3x + 2y + z = 44 + 40 + 56$$

$$3x + 2y + 48 = 140$$

$$3x + 2y = 92$$

$$y = 46 - 1,5x$$

Saame:  $x + 46 - 1,5x + n = 52$ , kust  $n - 0,5x = 6$

Kuna vähemalt ühte keelt õpib mitte rohkem kui 93% õpilastest, saame:

$$x + y + z \leq 93$$

$$x + 46 - 1,5x + 48 \leq 93$$

$$-0,5x \leq -1$$

$$x \geq 2$$

Kuna  $x\%$  vastab ühele õpilasele, siis  $n = kx$ , kus  $k \in \mathbb{N}$ .

Saame:  $kx - 0,5x = 6$

$$x = \frac{6}{k - 0,5}$$

Kui  $k = 0$ :  $x < 0$  ja ei sobi.

Kui  $k = 1$ , siis  $x = 12$ ,  $y = 28$ , aga 28 ei jagu 12-ga, ehk inimeste arv ei ole täisarv. Järelikult, see vastus samuti ei sobi.

Kui  $k = 2$ , siis  $x = 4$ ,  $y = 40$ ,  $n = 2 \cdot 4 = 8$

$$4 + 40 + 48 + 8 = 100$$

1 õpilane – 4%, järelikult 8% - 2 õpilast.

Ehk 2 õpilast ei õpi ühtegi keelt.

Kui  $k = 3$ , siis  $x = 2,4$ , aga 100 ei jagu 2,4-ga, ehk inimeste arv ei ole täisarv – vastus ei sobi.

Kui  $k = 4$ , siis  $x < 2$  ja ei sobi.

Mida suurem on  $k$  väärtus, seda väiksem on  $x$  väärtus. Kuna  $x \geq 2$ , siis ainuke sobiv  $k$  väärtus on 2.

Vastus: ühtegi keelt ei õpi 2 õpilast.

*Lahendus 2:*

Olgu õpilaste arv  $x$ . Siis:

$0,44x$  õpib jaapani keelt

$0,4x$  õpib saksa keelt

$0,56x$  õpib prantsuse keelt

Tähistame, et jaapani ja saksa keelt õpib  $a$  õpilast, saksa ja prantsuse keelt õpib  $b$  õpilast, jaapani ja prantsuse keelt õpib  $c$  õpilast.

Kõiki keeli õpib üks õpilane. Ja ainult ühte keelt õpib 48% õpilastest:

$$0,44x - a - c - 1 + 0,4x - a - b - 1 + 0,56x - b - c - 1 = 0,48x$$

$$0,92x - 2a - 2b - 2c = 3$$

$$0,46x - a - b - c = 1,5$$

$$a + b + c = 0,46x - 1,5$$

Kuna vähemalt ühte keelt õpib mitte rohkem kui 93% õpilastest, saame:

$$0,44x - a - c - 1 + 0,4x - a - b - 1 + 0,56x - b - c - 1 + a + b + c \leq 0,93x$$

$$0,47x - a - b - c - 2 \leq 0$$

$$0,47x - 2 \leq a + b + c$$

Saame:

$$0,47x - 2 \leq 0,46x - 1,5$$

$$0,01x \leq 0,5$$

$$x \leq 50$$

Kuna  $0,44x = \frac{44x}{100} = \frac{11x}{25}$  on õpilaste arv (täisarv), siis  $x$  peab jaguma 25-ga.

Ja  $x$  väärtuseks sobivad vaid kas 50 või 25.

Kui  $x = 50$ , siis

jaapani keelt õpib  $0,44 \cdot 50 = 22$  õpilast, saksa keelt õpib 20 õpilast ja prantsuse keelt õpib 28 õpilast.

Kõiki kolme keelt õpib 1 õpilane ja ainult ühte keele õpib  $0,48 \cdot 50 = 24$  õpilast.

Kahte keelt õpib:  $\frac{22+20+28-3-24}{2} = 21,5$  õpilast.

Kuna õpilaste arv ei või olla murdarvuline, siis  $x = 50$  ei sobi.

Kui  $x = 25$ , siis jaapani keelt õpib  $0,44 \cdot 25 = 11$  õpilast, saksa keelt õpib 10 õpilast ja prantsuse keelt õpib 14 õpilast.

Kõiki kolme keelt õpib 1 õpilane ja ainult ühte keelt õpib  $0,48 \cdot 25 = 12$  õpilast.

Kahte keelt õpib:  $\frac{11+10+14-3-12}{2} = 10$  õpilast.

Ning ühtegi keelt ei õpi  $25 - 1 - 10 - 12 = 2$  õpilast.

Vastus: 2 õpilast ei õpi ühtegi keelt.

Hindamine:

*Lahendus 1:*

Seose  $y = 46 - 1,5x$  leidmine 2p

Leidmine, et  $x \geq 2$  või sobivuse kontroll lahenduse lõpus 2p

Märkamine, et  $x = kn$  1p

$x$  leidmine ja vastuse saamine 2p

**7p**

*Lahendus 2:*

Leidmine, et  $x \leq 50$  3p

Märkamine, et  $x$  peab jaguma 25-ga 1p

$x = 50$  sobivuse kontroll 1p

$x = 25$  sobivuse kontroll ja vastus 2p

**7p**

Ainult õige vastuse eest anda 1p

2. Vastus:  $x_1 = 4$ ;  $x_2 = -1$

Lahendus:

Olgu  $x^2 - 3x = t$ , saame:  $\sqrt{t} + \sqrt{t-3} = \sqrt{t+5}$

Tõstame võrrandi pooled ruutu:

$$t + 2\sqrt{t(t-3)} + t - 3 = t + 5$$

$$2\sqrt{t(t-3)} = 8 - t$$

Tõstame võrrandi pooled ruutu:  $4t^2 - 12t = 64 - 16t + t^2$

$$3t^2 + 4t - 64 = 0$$

Kust  $t_1 = 4$ ;  $t_2 = -\frac{16}{3}$

Lahendame võrrandid:

$$x^2 - 3x = 4 \text{ ja } x^2 - 3x = -\frac{16}{3}.$$

Võrrandist  $x^2 - 3x = 4$  saame  $x_1 = 4$ ;  $x_2 = -1$

Võrrandil  $x^2 - 3x = -\frac{16}{3}$  lahend puudub.

Kontroll:

$$x = 4$$

$$\sqrt{4^2 - 3 \cdot 4} + \sqrt{4^2 - 3 \cdot 4 - 3} = \sqrt{4^2 - 3 \cdot 4 + 5}$$

$$2 + 1 = 3$$

V.p.=P.p.

$$x = -1$$

$$\sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot (-1)} + \sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 3} = \sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 5}$$

$$2 + 1 = 3$$

V.p.=P.p

Hindamine:

asendamine  $x^2 - 3x = t$

1p

Saadud võrrandi lahendamine ja  $t$  leidmine

3p

Võrrandite  $x^2 - 3x = 4$  ja  $x^2 - 3x = -\frac{16}{3}$  lahendamine

2p

Kontroll

1p

**7p**

Märkus: ainult õige vastuse eest anda 1p.

$$3. \text{ Vastus: } \begin{cases} a = 2018 \\ b = 2017 \end{cases} \text{ või } \begin{cases} a = 670 \\ b = 667 \end{cases} \text{ või } \begin{cases} a = 2018 \\ b = 4037 \end{cases} \text{ või } \begin{cases} a = 670 \\ b = 1343 \end{cases}$$

Lahendus:

Tegurdame:

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 2a^2 - 2ab - ab + b^2 = 2a(a - b) - b(a - b) = (a - b)(2a - b)$$

Kuna  $a$  ja  $b$  on positiivsed täisarvud, siis ka  $(a - b)$  ja  $(2a - b)$  on täisarvud.

Kuna arvu 2019 tegurid on 1; 3; 673 ja 2019, siis arvu 2019 esitamiseks kahe täisarvu korrutisena on neli võimalust:

$$1 \cdot 2019 = 2019;$$

$$-1 \cdot (-2019) = 2019$$

$$3 \cdot 673 = 2019$$

$$-3 \cdot (-673) = 2019$$

Saame 8 süsteemi:

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ 2a - b = 2019 \end{cases} \quad \text{kust } a = 2018, \quad b = 2017$$

$$\begin{cases} a - b = 2019 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \quad \text{kust } a = -2018 \text{ ja } b = -4037, \text{ mis meile ei sobi, kuna väärtused peavad positiivsed olema}$$

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ 2a - b = -2019 \end{cases} \quad \text{kust } a = -2018, \quad b = -2017 \text{ ja meile ei sobi}$$

$$\begin{cases} a - b = -2019 \\ 2a - b = -1 \end{cases} \quad \text{kust } a = 2018, \quad b = 4037$$

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ 2a - b = 673 \end{cases} \quad \text{kust } a = 670, \quad b = 667$$

$$\begin{cases} a - b = 673 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \quad \text{kust } a = -670, \quad b = -1343 \text{ ja meile ei sobi}$$

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ 2a - b = -673 \end{cases} \quad \text{kust } a = -670, \quad b = -667 \text{ ja meile ei sobi}$$

$$\begin{cases} a - b = -673 \\ 2a - b = -3 \end{cases} \quad \text{kust } a = 670, \quad b = 1343$$

$$\text{Vastus: } \begin{cases} a = 2018 \\ b = 2017 \end{cases} \text{ või } \begin{cases} a = 670 \\ b = 667 \end{cases} \text{ või } \begin{cases} a = 2018 \\ b = 4037 \end{cases} \text{ või } \begin{cases} a = 670 \\ b = 1343 \end{cases}$$

Hindamine:

Tegurdamine	2p
Märkus, et kuna $a$ ja $b$ on täisarvud, siis ka $(a - b)$ ja $(2a - b)$ on täisarvud	1p
Märkus, et arvu 2019 esitamiseks kahe täisarvu korrutisena on olemas 4 võimalust	1p
Süsteemide lahendamine ja sobivuse kontroll	2p
Vastuse saamine	<u>1p</u>
	<b>7p</b>

4.

Lahendus:

$$\angle ABK = 90^\circ - \angle KBC$$

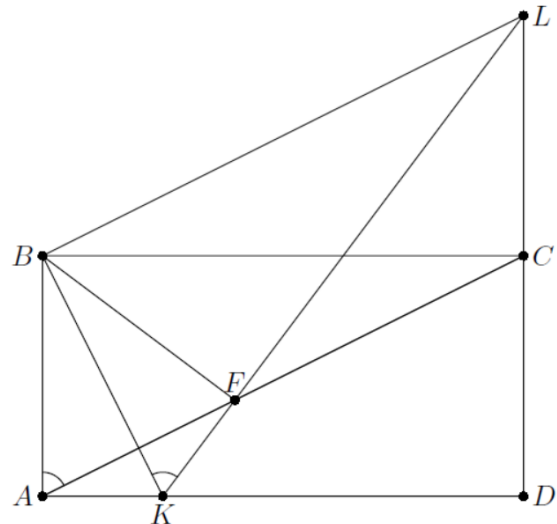
Kuna sirged BK ja BL on risti, siis

$$\angle CBL = 90^\circ - \angle KBC$$

Kust  $\angle ABK = \angle CBL$ .

Kuna kolmnurgad ABK ja CBL on täisnurksed ja

$\angle ABK = \angle CBL$ , siis kolmnurgad ABK ja CBL on sarnased ja  $\frac{AB}{BK} = \frac{CB}{BL}$ .



Kuna kolmnurgad ABC ja KBL on täisnurksed ( $\angle ABC = \angle KBL = 90^\circ$  ning  $\frac{AB}{BK} = \frac{CB}{BL}$ ),

Siis kolmnurgad ABC ja KBL on samuti sarnased ning  $\angle BKF = \angle BAF$ .

Sellest järeldub, et ümber nelinurga ABFK saab joonestada ringjoone, ning kuna  $\angle BAK = 90^\circ$  siis ka  $\angle BFK = 90^\circ$

Hindamine:

Kolmnurkade ABK ja CBL sarnasus	2p
Kolmnurkade ABC ja KBL sarnasus	2p
Järeldus, et $\angle BKF = \angle BAF$	1p
Järeldus, et nelinurk ABFK on ringjoonele sissejoonestatud	1p
Järeldus, et kuna $\angle BAK = 90^\circ$ siis ka $\angle BFK = 90^\circ$	1p
	<b>7p</b>

**5. Vastus: 21 ruutu**

Nummerdame väljaku nii, nagu on joonisel näidatud.

Kui me nüüd paigutame ükskõik kuhu väljakule ristküliku 1x3, siis selle ristküliku kõigi kolme ruudu numbrid on erinevad.

Väljakul on 21 ruutu numbriga 1, 22 ruutu numbriga 2 ja 21 ruutu numbriga 3. Järelikult, peab värvima vähemalt 21 ruutu selleks, et iga ristküliku 1x3 sees oleks vähemalt üks must ruut, sest kui me värvime ainult 20 ruutu, siis leidub ristkülik 1x3, kus kõik ruudud on valged.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Hindamine:

Väljaku sobiv nummerdamine (kolme värviga värvimine)

3p

Õige vastus

2p

Selgitus, et vähem ei või olla

2p

**7p**